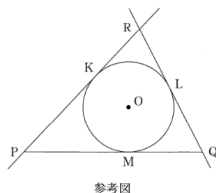


## 平面図形について、条件を変えて図形の考察をする問題

### 共通テスト 第1問〔2〕(2)

② 点  $O$  を中心とする半径  $6$  の円  $O$  が、線分  $PQ$  上の  $P$ 、 $Q$  と異なる点  $M$  において線分  $PQ$  に接している。  $P$ 、 $Q$  それぞれを通る円  $O$  の接線で、直線  $PQ$  と異なるものを引き、この円との接点をそれぞれ  $K$ 、 $L$  とする。以下では直線  $PK$ 、 $QL$  が交わる場合を考え、その交点を  $R$  とする。このとき、 $\triangle PQR$  の辺の長さについて考えよう。

(i)  $PK = 12$ 、 $QL = 9$  であるときを考え、 $\angle KPM = P$ 、 $\angle LQM = Q$  とする。このとき、2 直線  $PK$ 、 $QL$  の交点  $R$  は直線  $PQ$  に関して点  $O$  と同じ側にある。



四角形  $PMOK$  が  $\triangle PMO$  と  $\triangle PKO$  に分けられることに注意すると、四角形  $PMOK$  の面積は  $\frac{1}{2} \times PM \times OK$  であることがわかる。このことから、

① を用いると、 $\sin P = \frac{OK}{PM}$  となることがわかる。

四角形  $QLOM$  についても同様に考えると、 $\sin Q = \frac{OM}{QL}$  となるこ

ともわかる。よって、 $PR : QR = \frac{PM}{QL} : \frac{QL}{PM}$  となり、これにより

$RL = \frac{PM \times QL}{PM + QL}$  と求められるので、 $\triangle PQR$  の辺の長さを求めることができる。

(ii)  $PK = 4\sqrt{2}$ 、 $QL = 3\sqrt{2}$  であるときを考える。このとき、2 直線  $PK$ 、 $QL$  の交点  $R$  は、直線  $PQ$  に関して点  $O$  と反対側にある。このことに注意すると  $RL = \frac{PM \times QL}{PM - QL}$  と求められるので、 $\triangle PQR$  の辺の長さを求めることができる。

### 第1回ベネッセ・駿台マーク模試 第1問〔2〕(2)

(2)  $\triangle ABC$  において、 $BC = 2$ 、 $CA = b$ 、 $AB = c$  とする。

(i)  $\angle BAC$  が鋭角であるとき、 $b$ 、 $c$  はつねに  $b^2 + c^2 > 4$  を満たす。

$b^2 + c^2 > 4$  の解答群

- |                   |                   |                   |
|-------------------|-------------------|-------------------|
| ① $4 < b^2 + c^2$ | ② $b^2 < 4 + c^2$ | ③ $c^2 < b^2 + 4$ |
| ④ $4 > b^2 + c^2$ | ⑤ $b^2 > 4 + c^2$ | ⑥ $c^2 > b^2 + 4$ |

(ii)  $b + c = \frac{5}{2}$ 、 $\frac{1}{4} < b < \frac{9}{4}$  とする。

$\angle ABC$  が鋭角であるような  $b$  の値の範囲は

$$\frac{1}{4} < b < \frac{5}{4}$$

である。

両者とも、平面図形について、線分の長さに関する条件が変わったとき、それまでに利用した考え方をういて解く問題であった。ただ同じ考察を繰り返すのではなく、条件の違いがそれまでの考え方にどのような影響を及ぼすかを、与えられた図を用いたり、自分で図にかいてみたりするなどして把握し、結論を導くことができるかが解答のポイントであった。

## 最大・最小の条件から文字定数を含む 2 次関数について考察する問題

## 共通テスト 第 2 問〔1〕(ii)

(ii) 2 次関数  $y = g(x)$  は次の条件 2 を満たすとする。

条件 2

$a$  を正の定数とし、 $y = g(x)$  の  $0 \leq x \leq a$  における最大値を  $M$ 、最小値を  $m$  とすると

- $0 < a < 3$  ならば、 $m > -2$  である。
- $a \geq 3$  ならば、 $m = -2$  である。
- $0 < a \leq 6$  ならば、 $M = 7$  である。
- $a > 6$  ならば、 $M > 7$  である。

このとき、2 次関数  $y = g(x)$  のグラフは  の放物線であり

$g(x) =$

である。

の解答群

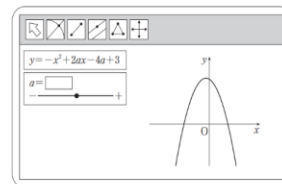
- ☐ 下に凸 ☐ 上に凸

の解答群

- |   |  |
|---|--|
| <input type="radio"/> $2x^2 - 12x + 16$ | <input type="radio"/> $-2x^2 + 12x - 16$ |
| <input type="radio"/> $2x^2 - 12x - 16$ | <input type="radio"/> $-2x^2 + 12x - 20$ |
| <input type="radio"/> $x^2 - 7$         | <input type="radio"/> $-x^2 + 7$         |
| <input type="radio"/> $x^2 - 6x + 7$    | <input type="radio"/> $-x^2 + 6x - 7$    |
| <input type="radio"/> $2x^2 - 9x + 7$   | <input type="radio"/> $-2x^2 + 3x + 7$   |

## 2026直前演習 第 7 回第 2 問〔2〕(4)

(2) 2 次関数  $f(x) = -x^2 + 2ax - 4a + 3$  ( $a$  は実数の定数) について、次の図のように  $y = f(x)$  のグラフをコンピュータのグラフ表示ソフトを用いて表示させ、考察している。このソフトでは、図の画面上の  に  $a$  の値を入力すると、その値に応じたグラフが表示される。さらに、 の下にある  を左に動かすと  $a$  の値が減少し、右に動かすと  $a$  の値が増加するようになっており、 $a$  の値の変化に応じて 2 次関数のグラフが座標平面上を動く仕組みになっている。



(1)  $y = f(x)$  のグラフの頂点の座標は、 $(a, a^2 - \text{ケ} a + \text{コ})$  である。

(2)  $y = f(x)$  のグラフが  $x$  軸と異なる二つの共有点をもつときの  $a$  の値の範囲は

$a < \text{サ} \cdot \text{シ} < a$

である。

(数学 I、数学 A 第 2 問は次ページに続く。)

(3)  $a$  の値を  $-10$  から  $10$  まで増加させたときの  $y = f(x)$  のグラフの変化として、次の ☐-☐ のうち、正しいものは  である。

の解答群

- ☐ 放物線の開き具合は大きくなる。  
☐  $y$  軸との交点は下方に動く。  
☐ 放物線の頂点が  $y$  軸より右側にあることはない。  
☐ 放物線の頂点はつねに  $x$  軸より上側にある。

(4)  $0 \leq x < 1$  とする。

(i)  $-1 < a < 0$  であることは、 $f(x)$  の最大値が存在するための .

(ii)  $f(x)$  の最小値が存在することは、 $\frac{1}{2} \leq a \leq 1$  であるための .

,  の解答群 (同じものを繰り返し選んでもよい。)

- ☐ 必要条件であるが、十分条件ではない  
☐ 十分条件であるが、必要条件ではない  
☐ 必要十分条件である  
☐ 必要条件でも十分条件でもない



両者とも、文字定数を含む 2 次関数について、最大・最小の条件とグラフの形状を結びつけて考える問題。定義域や最大値、最小値の条件とグラフの軸や頂点の座標の対応を把握し、条件を満たすグラフについてイメージしながら、具体的な関数や必要十分性について考察する力が求められた。

## 数列の一般項を工夫して求める問題

## 共通テスト 第4問 (2)

(2) 太郎さんは、①を変形すると  $\sum_{k=1}^n b_k = a_n - a_1$  となることから、数列の和を求めるために次のことを考えた。

発想

ある数列  $\{d_n\}$  の和を求めたいときは、数列  $\{c_n\}$  で、 $\{c_n\}$  の階差数列が  $\{d_n\}$  となるものを見つけられればよい。

太郎さんは、この発想に基づいて、一般項が

$$d_n = (2n+1) \cdot 2^n$$

で表される数列  $\{d_n\}$  の和を求めることにした。

数列  $\{c_n\}$  で、 $\{c_n\}$  の階差数列が  $\{d_n\}$  となるもの、すなわち

$$(2n+1) \cdot 2^n = c_{n+1} - c_n \quad (n=1, 2, 3, \dots) \quad \text{②}$$

となるものを見つけたい。太郎さんは、 $\{d_n\}$  の一般項が  $n$  の1次式と  $2^n$  の積であることから、 $\{c_n\}$  の一般項が

$$c_n = (pn+q) \cdot 2^n$$

と表されるのではないかと考えた。ここで、 $p, q$  は定数である。このとき、 $c_{n+1} - c_n$  を  $n, p, q$  を用いて表すと

$$c_{n+1} - c_n = \{ \boxed{\text{コ}} n + \boxed{\text{サ}} \} \cdot 2^n$$

となる。

よって、 $p = \boxed{\text{シ}}$ 、 $q = \boxed{\text{スセ}}$  のとき②が成り立つ。

## 第3回ベネッセ・駿台マーク模試 第4問 (3)

(ii)

先生の助言

$$f(n+1) = 6f(n) + a_n \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

を満たす  $f(n)$  を求める。

$p, q$  を実数の定数とし、 $f(n) = p \cdot 2^n + q$  ( $n=1, 2, 3, \dots$ ) とする。このとき

$$f(n+1) = 6f(n) + a_n \quad (n=1, 2, 3, \dots) \quad \text{③}$$

がすべての自然数  $n$  について成り立つような  $p, q$  を求めると

$$p = \boxed{\text{シス}}, q = \frac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}$$

である。

また、②、③により、数列  $\boxed{\text{タ}}$  は等比数列であることがわかる。

$\boxed{\text{タ}}$  の解答群

①  $\{b_n + f(n)\}$    ②  $\{b_n - f(n)\}$    ③  $\{b_n + f(n+1)\}$    ④  $\{b_n - f(n+1)\}$

両者とも、与えられた漸化式を変形し、漸化式を満たす数列の一般項を求める問題。求める数列の一般項を  $p, q$  を用いて表し、与えられた漸化式に代入して係数を比較することで、一般項を求めることができる。途中式のつながりを意識して、見通しをもって式を丁寧に整理できるかが問われた。

## 3 次関数のグラフの概形を考察する問題

## 共通テスト 第3問 (1)

(1)  $k$  を実数とし、3 次関数  $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + k$  を考える。

(i)  $f'(x) = \boxed{\text{ア}}$  である。

$x = \boxed{\text{イ}}$  のとき、 $f(x)$  は極大値  $\boxed{\text{ウ}}$  をとる。

$x = \boxed{\text{エ}}$  のとき、 $f(x)$  は極小値  $\boxed{\text{オ}}$  をとる。

$\boxed{\text{ア}}$  の解答群

- |  |                                       |
|--|---------------------------------------|
| ① $\frac{1}{3}x^2 - 2x + 3$                                | ⑦ $\frac{1}{3}x^2 - 2x + 3 + k$       |
| ② $x^2 - 4x + 3$   | ⑧ $x^2 - 4x + 3 + k$                  |
| ③ $\frac{1}{12}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + kx$ | ⑨ $\frac{1}{3}x^4 - 2x^3 + 3x^2 + kx$ |

$\boxed{\text{ウ}}$ 、 $\boxed{\text{オ}}$  の解答群(同じものを繰り返し選んでもよい。)

- |       |                      |                      |                     |                     |
|-------|----------------------|----------------------|---------------------|---------------------|
| ① 0   | ② 1                  | ③ 2                  | ④ $\frac{2}{3}$     | ⑤ $\frac{4}{3}$     |
| ⑥ $k$ | ⑦ $-\frac{4}{3} + k$ | ⑧ $-\frac{2}{3} + k$ | ⑨ $\frac{2}{3} + k$ | ⑩ $\frac{4}{3} + k$ |

(ii)  $y = f(x)$  のグラフの概形は

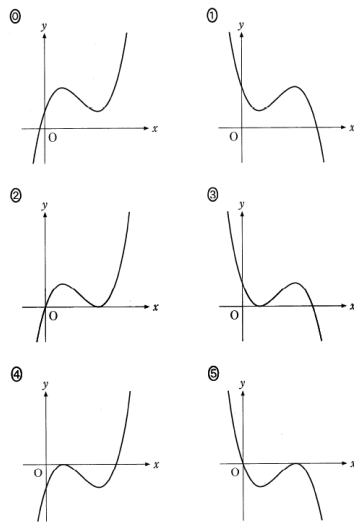
$k = 0$  のとき  $\boxed{\text{カ}}$

$k > 0$  のとき  $\boxed{\text{キ}}$

である。

(数学Ⅱ、数学B、数学C第3問は次ページに続く。)

$\boxed{\text{カ}}$ 、 $\boxed{\text{キ}}$  については、最も適当なものを、次の①～⑥のうちから一つずつ選べ。ただし、同じものを繰り返し選んでもよい。



(数学Ⅱ、数学B、数学C第3問は次ページに続く。)

## 2026直前演習 第1回第3問 (2)

$a$  を定数とする。 $x$  の関数  $f(x) = x^3 - 2ax^2 + 3ax + 1$  があり、 $f(x)$  は極大値と極小値をもつ。この関数について考えよう。

(中略)

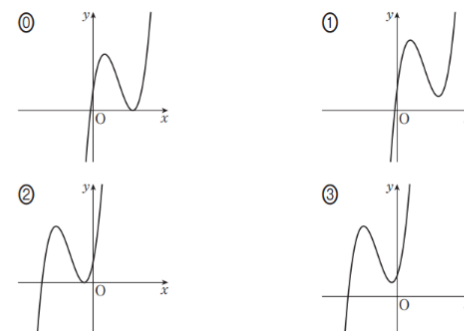
(2) 極大値と極小値の和が6であるとき、(1)の  $a$ 、 $\beta$  は  $f(a) + f(\beta) = 6$  ……④を満たすから、②、③を④に代入すると

$$\boxed{\text{ス}} a^3 - \boxed{\text{セソ}} a^2 + 27 = 0 \quad \dots\dots\dots ⑤$$

を得る。さらに、方程式⑤の整数解は  $a = \boxed{\text{タ}}$  であり、この値は①を満たす。

$a = \boxed{\text{タ}}$  のときの  $y = f(x)$  のグラフの概形は  $\boxed{\text{チ}}$  である。

$\boxed{\text{チ}}$  については、最も適当なものを、次の①～③のうちから一つ選べ。



両者とも、文字を含む3次関数を微分して極大値、極小値をそれぞれ求め、条件を満たすグラフの概形を判断する問題。導関数の符号の変化からグラフの増減を丁寧に整理する必要がある。そのうえで、極大値と極小値からグラフ全体の位置を把握して、条件を満たすグラフの概形を絞ることができるかが問われた。